# 第四章 图

## 无向图

### 术语表

### 表示无向图的数据类型

表格 ‑1 无向图的API

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

## 有向图

在**有向图**中，边是单向的：每条边所连接的两个顶点都是一个有序对，它们的邻接性是单向的。

### 术语

**定义。**一幅邮方向的图（或有向图）是由一组顶点和一组由方向的边组成的，每条有方向的边都连接着有序的一对顶点。

我们称一条有向边由第一个顶点（也称为**头**）指出并指向第二个顶点（也称为**尾**）。在一幅有向图中，一个顶点的**出度**为由该顶点指出的边的总数；一个顶点的**入度**为指向该顶点的边的总数。一幅有向图中两个顶点的关系可能有4种：没有边相连；存在从v到w的边v->w；存在w到v的边w->v；既存在v->w也存在w->v，即双向连接。

**定义。**在一幅有向图中，**有向路径**由一系列顶点组成，对于其中的每个顶点都存在一条有向边从它指向序列中的下一个顶点。**有向环**为一条至少含有一条边且起点和终点相同的有向路径。**简单有向环**是一条（除了起点和终点必须相同之外）不还有重复的顶点和边的环。路径或者环的长度即为其中所包含的边数。

### 有向图的数据类型

#### 有向图的表示

#### 输入格式

#### 有向图取反

#### 顶点的符号名

### 有向图的中的可达性

**单点可达性。**给定一幅有向图和一个起点s，回答“是否存在一条从s到达给定顶点v的有向路径？”等类似问题。

**多点可达性。**给定一幅有向图和顶点的集合。回答“是否存在一条从集合中任意顶点到达给定顶点v的有向路径？”等问题。

**命题D。**在有向图中，深度优先搜索标记由一个集合的顶点可达的所有顶点所需的时间与被标记的所有顶点的出度之和成正比。

证明。同命题A。

#### 标记-清除的垃圾收集

多点可达性的一个重要的实际应用实在典型的内存管理系统中。在一幅有向图中，一个顶点表示一个对象，一条边则表示一个对象对另一个对象的引用。

#### 有向图的寻路

深度优先路径和广度优先路径都是有向图处理中的重要算法。

**单点有向路径。**给定一幅有向图和一个起点s，回答“从s到给定目的顶点v是否存在一条有向路径？如果有，找出这条路径。”等类似问题。

**单点最短有向路径。**给定一幅有向图和一个起点s，回答“从s到给定目的顶点v是否存在一条有向路径？如果有，找出其中最短的那条（所含边数最少）。”等问题。

### 环和有向无环图

#### 调度问题

**优先级限制下的调度问题。**给定一组需要完成的任务，以及一组关于任务完成的先后次序的优先级限制。在满足限制的条件的前提下应该如何安排并完成所有任务？

在有向图中，优先级限制条件下的调度问题等价于以下这个基本的问题。

**拓扑排序。**给定一幅有向图，将所有的顶点排序，使得所有的有向边均从排在前面的元素指向排在后面的元素（或者说明无法做到这一点）。

#### 有向图中的环

一般来说，如果一个有优先级限制的问题中存在有向环，那么这个问题肯定是无解的。

**有向环检测。**给定的有向图中包含有向环吗？如果有，按照路径的方向从某个顶点并返回自己来找到环上的所有顶点。

一幅有向图中含有环的数量可能是图的大小的指数级别，因此我们只需要找到一个环即可，而不是多有环。

**定义。**有向无环图（DGA）就是一幅不含有环的有向图。

因此，解决有向环检测的问题可以回答下面这个问题：**一幅有向图是有向无环图吗？基于深度优先搜索来解决这个问题并不困难，因为由系统维护的递归调用的栈表示的正式“当前”正在遍历的有向路径（就好像用Tremaux方法探索迷宫时的那条绳子一样）。一旦我们找到了一条有向边v->w且w已经存在于栈中，就找到了一个环，因为栈表示的是一条有w到v的有向路径，而v->w正好补全了这个环。同时，如果没有这样的边，那就意味着这幅有向图是无环的。**

#### ****顶点的深度优先次序与拓扑排序****

优先级限制下的调度问题等价于计算有向无环图中的所有顶点的拓扑顺序。

命题E。当且仅当一幅有向图是无环图时它才能进行拓扑排序。

证明。如果一幅有向图中含有一个环，它就不可能是拓扑有序的。